VŨ QUỐC ANH

TUYỂN TẬP 400 BÀI TOÁN
TÍCH PHÂN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
Chọn lọc

THI VÀO ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG
TỪ 1977 ĐẾN 2000 TRONG TOÀN QUỐC

www.VNMATH.com

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Học sinh thường lúng túng khi làm những bài toán "tích phân hàm số lượng giác" khi thi vào các trường Đại học và Cao đẳng, phần vì "lượng giác" thuộc chương trình lớp 11, và "tích phân" học ở cuối học kỳ II lớp 12. Để giúp đỡ học sinh tự luyện tập, chúng tôi giới thiệu "Tuyển tập 400 bài toán tích phân hàm số lượng giác".

Tập sách có ba phần:

Phần một : Giới thiệu các công thức và kiến thức về lượng giác, tích phân.

Phần hai : 400 đề bài toán (193 bài tự luyện tập, 207 đề thi).

Phần ba : Phần giải các bài toán.

Phần đề thi được tuyển chọn gồm những bài toán thi đại học đã ra từ năm 1977 đến năm 2000 của 60 trường Đại học và Cao đẳng trong toàn quốc từ Thái Nguyên, thủ đô Hà Nội, Hải Phòng, Đà Nẵng, Quy Nhơn, Thành phố Hồ Chí Minh... đến Cần Thơ, Nha Trang, Đà Lạt.

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp ích nhiều cho các em học sinh trong việc rèn luyện toán để đạt kết quả tốt.

Cuốn sách có thể có những thiếu sót, mong các độc giả góp ý.

Tác giả

VŨ QUỐC ANH

CHƯƠNG I

NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ VÀ CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

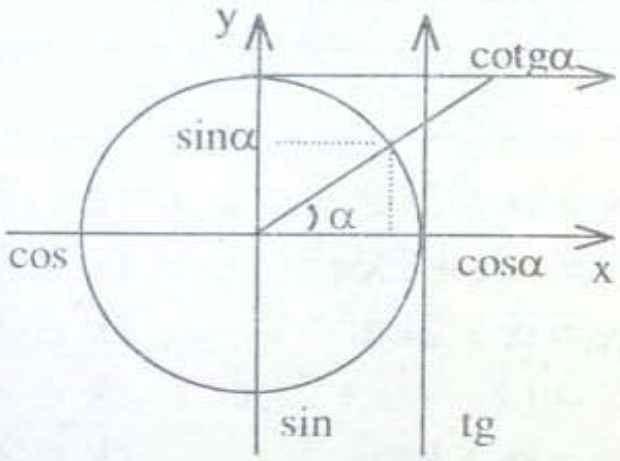
1. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ CUNG

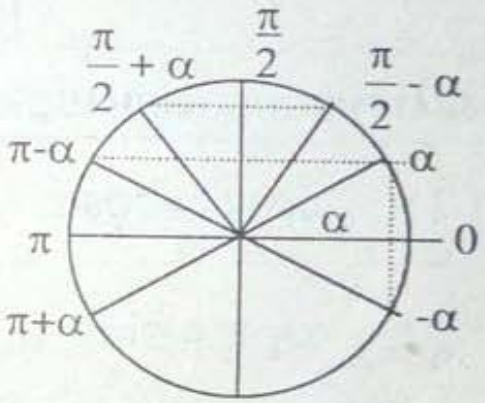
$180^0 = \pi$ radian ; $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ radian

π radian $= 180^0$; 1 radian $= \left(\dfrac{180^0}{\pi}\right) = 57^0 17' 45''$

Radian là số đo một cung có độ dài bằng bán kính.

2. TÊN GỌI CÁC TRỤC SIN, COSIN, TG VÀ COTG





$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad ; \quad \alpha \neq k\pi \quad (k \in Z)$$

Chú ý : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\cos\alpha| \leq 1$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\sin\alpha| \leq 1$

$\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là 2π

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\cot g\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là π

$\cot g\alpha = \cot g(\alpha + k\pi)$ $(k \in Z)$

$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi)$ $(k \in Z)$

$\cot g\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có thể lấy giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$

3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ CUNG ĐẶC BIỆT

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||
$\cotg\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1) $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

và $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

2) $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

và $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad (k \in Z)$

3) $\tg x = \tg\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in Z)$

4) $\cos x = \sin\alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

5. GIỚI HẠN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tg ax}{ax} = 1 \qquad (a \neq 0)$$

6. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VỚI BA CẠNH CỦA TAM GIÁC:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

7. HỆ THỨC GIỮA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = (1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)$$

8. CUNG ĐỐI NHAU α và $(-\alpha)$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

9. CUNG BÙ NHAU α và $(\pi - \alpha)$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

10. CUNG PHỤ NHAU α và $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$

11. CUNG HƠN NHAU $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

12. CUNG BÙ HƠN NHAU π: (α và π + α)

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(\pi+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$

13. CÔNG THỨC CỘNG CUNG, CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI, NHÂN BA.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \qquad = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \qquad \operatorname{tg}2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

sina, cosa đổi ra $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$: $\qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$$\sin a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} \quad ; \quad \cos a = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\operatorname{tg}3a = \frac{3\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} \qquad \operatorname{cotg}3a = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}{3\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}^3 a}$$

14. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a.\sin b}$$

15. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

6. CÁC HỆ QUẢ:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

7. ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

$f : x \to \cos x$	$f' : x \to -\sin x$
$f : x \to \sin x$	$f' : x \to \cos x$
$f : x \to \operatorname{tg} x$	$f' : x \to \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f : x \to \operatorname{cotg} x$	$f' : x \to \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
$f : x \to \cos(ax + b)$	$f' : x \to -a\sin(ax + b)$
$f : x \to \sin(ax + b)$	$f' : x \to a\cos(ax + b)$

BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ $(a \neq 0)$

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

6. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ $(a \neq 0)$

7. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$

1. $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$

2. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot g(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$

4. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}tg(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \qquad (a > 0)$

6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C \qquad (a > 0)$

7. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad (a > 0)$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

9. $\int \sqrt{a^2-x^2}\ d = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad (a > 0)$

10. $\int \sqrt{x^2+k}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ

A. Định nghĩa:

Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và có một nguyên hàm F(x) thì tích phân từ a đến b của hàm số f(x) là số thực F(b) – F(a).

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$

B. Các tính chất:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

6. Với $\forall\ x \in [a, b]$ mà $f(x) \geq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

C. Tích phân từng phần

Cho u, v là hai hàm số liên tục và có đạo hàm trên đoạn [a, b]. Khi đó:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

CHƯƠNG II
ĐỀ TOÁN

1. Tính tích phân: 1/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}x dx$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot g x dx$

2. Tính tích phân: 1/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

3. Tính tích phân: 1/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 x dx$ 2/. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot g^2 x dx$

4. Tính: 1/ $\int \cos^3 x dx$ 2/ $\int \sin^4 x dx$.

5. Tính: $\int \text{tg}^3 x dx$.

6. Tính tích phân: Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Tính I_1, I_2.

7. Tính tích phân: 1/ $\int \frac{dx}{\sin x}$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

8. Tính: $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

9. Tính: 1/ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ 2/ $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$.

10. Tính: 1/ $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$ 2/ $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

11. Tính: 1/ $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$ 2/ $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

12-13. Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$ 2/ $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

14. Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ 2/ $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

54. Tính: $I = \int \frac{\ln tgx}{\sin x \cos x} dx$

55-56. Tính: 1/ $I = \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 2/ $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

57-58. Tính: 1/ $I = \int (1 - tg3x)^2 dx$

2/ $I = \int \left(\sqrt{\sin x} + \cos x\right)^2 dx$

59. Tính tích phân: $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2(\ln x) dx$

60. Tính: $I = \int \cos x \ln(1 + \cos x) dx$

61. Tính tích phân: 1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ 2/ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$

62. Tính: $I = \int \frac{\sin + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$

63. Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot gx}} dx$

64. Tính: 1/ $I = \int \frac{arctgx}{1 + x^2} dx$ 2/ $I = \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.

65. Tính: $I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

66. Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

67. Tính: $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx$

68. Tính: $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

69. Tính: $I = \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

70. Tính: 1/ $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ 2/ $\int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

71. Tính: $I = \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$

72. Tính tích phân: 1/ $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 2/ $\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{1+x^2} dx$

73-74. Tính: 1/ $\int x^2 \cos(\omega x) dx$ 2/ $\int e^{2x} x^3 dx$

75-76 Tính: 1/ $\int \frac{\cot gx}{\ln \sin x} dx$ 2/ $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$

77-78. Tính: 1/ $\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 2x} dx$ 2/ $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

79-80. Tính: 1/ $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ 2/ $\int \frac{1+\text{tg}x}{\sin 2x} dx$

81. Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} dx$ 2/ $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

82. Tính: $\int \frac{1 - \text{tg}\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}\frac{x}{2}} dx$

83-84. Tính: 1/ $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} dx$ 2/ $\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg}^2 x}}{\cos^4 x} dx$

85. Tính: $I = \int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

86. Tính: $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}} dx$

87-88. Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ 2/ $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$

89-90. Tính: 1/ $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$ 2/ $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$

91. Tính: $1/\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$ $2/\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

92. Tính: $1/\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ $2/\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$

93. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x+\arccos x)dx$

94-95. Tính: $1/\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ $2/\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x}dx$

96. Tính: $I=\int(\frac{1}{\sin x\cos x}-tgx)^2dx$

97. Tính tích phân: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

98. Tính: $I=\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx$

99. Tính tích phân: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^4 x}$

100. Tính: $I=\int \frac{x-arctgx}{x(1+x^2)arctgx}dx$

101. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{\arcsin x}dx$

102. Tính: $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$

103-104. Tính tích phân: $1/\ I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{tgx}{tgx+\cot gx}dx$ $2/\ I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cot gx}{\cot gx+tgx}dx$

105. Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

106. Tính: $I=\int \frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}dx$

107. Tính tích phân: $I=\int_1^2 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

108. Tính: $I=\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx$

109. Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+2\cos^2 x}dx$

110. Tính: $I=\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

111. Tính tích phân: $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$

112. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$

113. Tính: $I=\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$

114. Tính: $\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}$

115. Tính: $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}dx$

116. Tính: $I=\int e^{\frac{2x}{3}}\sin e^{\frac{x}{3}}dx$

117. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{4+\mathrm{tg}^2 x}}$

118. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$

119. Tính: $I=\int \frac{1+e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

120. Tính: $I=\int \mathrm{tg}^5 x dx$

121. Tính: $I=\int \cot g^6 x dx$

122. Tính: $I=\int e^{ax}\sin bx dx$

123. Tính: $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ $(a-b\neq \pi, k\in z)$

124. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

125. Tính: $I=\int \frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x+\cos x}dx$

126. Tính: $I=\int \frac{dx}{\sin x-\sin a}$

127. Tính tích phân: $I_n=\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x\cos(n+1)x dx$

GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

128. Cho $I_n=\int_0^1 x^n \sin \pi x dx$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$

129. Cho $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos x}dx$. Chứng minh :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}+\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}}+\ldots+\frac{n\sin\pi}{1+\cos^2\pi}\right]=\frac{\pi^2}{4}$$

130. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n})$

131. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^b \frac{arctgt}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt\right)$ (với b>0)

132. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

133. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx$ $(n\in N)$

BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TÍCH PHÂN

134. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1/ $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \le \int_0^1 x \sin^2 x dx$ 2/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

135. Với mọi $x \in [0,\pi/4]$ .Chứng minh : $\ln(1+tgx) \le tgx$

136. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{\pi}{14} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{8}$$

137. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin x}(5 + 7\sqrt{\sin x} - 6\sin x)dx \le \frac{4\pi}{3}$$

138. Chứng minh bất đẳng thức : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

139. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{98} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(5 + 2\cos t)^2} < \frac{1}{2(5+\sqrt{3})^2}$$

TÍCH PHÂN TRUY HỒI

140. Tính tích phân: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{2n+1} dx$

141. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \in N^*)$

Chứng minh : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ và tính I_n .

142. Cho tích phân : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx \quad (n=1,2,3\ldots)$

Chứng minh : $I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$

143. Cho tích phân : $I_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx$

Chứng minh : $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$

NHỮNG ĐỀ TÍCH PHÂN ĐƯA VỀ DẠNG LƯỢNG GIÁC

144. Tính: $I = \int \frac{x^7}{(1-x^2)^5} dx$

145. Tính: $I = \int \frac{arctgx}{x^2(1+x^2)} dx$

146. Tính: $I = \int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}} dx$

147. Tính: $I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$

148. Tính: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

149. Tính: $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

150. Tính: $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

151. Tính: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

152. Tính: $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$ nhìn kĩ vào.

153. Tính: $I = \int \sqrt{a^2-x^2} dx$

154. Tính: $I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

155. Tính: $I = \int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$

156. Tính: $I = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6} dx$

157. Tính: $I = \int \frac{x^4}{(1+x^2)^3} dx$

158. Tính: $I = \int \frac{x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} dx$

159. Tính : $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2} dx$

160. Tính: $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

161. Tính: $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2} dx$

162. Tính: $I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$ **163.** Tính: $\int\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$

164. Tính: $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

165. Tính: $I=\int\frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$

166. Tính $I=\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$

167. Tính: $I=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ $x<a<b$

168. Tính tích phân: $I=\int_{-a}^{b}\sqrt{(x-a)(x-b)}dx$

169. Tính: $I=\int\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}dx$

170. Tính: $I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

171. Tính: $I=\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx$

172. Tính: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

173. Tính: $I=\int\frac{xdx}{(1-x^4)^3}$

174. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^2x}{(1+tg^2x)^2\cos^2x}dx$

175. Tính: $I=\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

176. Tính tích phân: $I=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$

177. Tính tích phân: $I=\int \frac{x^{\cdot}}{(1+x^2)^3}dx$

178. Tính tích phân: $I=\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

179. Tính tích phân: $I=\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}dx$

180. Tính tích phân: $I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

181. Tính tích phân: $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2+1}dx$ bằng 2 cách

182. Tính: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

183. Tính: $I=\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

184. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường

$y = \sin x$ và $y = \cos x$ với $x \in [0,\pi/2]$

185. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = a\,rc\sin x$, $y = \arccos x$ và $y = 0$.

186. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = arctg\,x$, $y = arccotgx$ và $y = 0$;

187. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin^2 x$

188. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = x + \sin^2 x$ và $y = x$ $(0 \le x \le \pi)$

TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

189. Tính thể tích các hình tròn xoay do các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox

1/ $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

2/ $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

190. Tính thể tích hình tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$ quay quanh trục Ox.

191. Cho D là miền giới hạn bởi các đường

$y = \sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$

Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên do ta quay miền D quanh trục Ox.

192. Tính thể tích vật tròn xoay được tạo nên do ta quay miền D được giới hạn bởi các đường: $y = \ln x$, $y = 0$ và $x = 2$ quay quanh trục Ox.

193. Cho miền D giới hạn bởi các đường cong $y = tg^3x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ và $x = \pi/4$ .Tính diện tích miền D và thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho D quay quanh trục Ox.

ĐỀ THI ĐẠI HỌC

ĐỀ THI NĂM 1977-1992

194. Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^3}$

bằng 2 cách: 1/ $t = x^2 + 1$ 2/ $x = tgt$

Đại học 1977

195 1. Tính a, b để : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1+\sin x} + \frac{b\cos x}{1-\sin x}\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

2. Bằng cách phân tích $\frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$

(Đại học BK – Y Dược 1983)

196. Với mỗi số nguyên tự nhiên, xét : $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{5 - 4\cos x}$

Chứng minh: $I_n = \frac{5}{2} I_{n-1} - I_{n-2} (\forall n \geq 3)$

Đại học Kinh tế TP.Hồ Chí Minh.1986

197. Chứng mlnh : $\arcsin|\sin x| + \arcsin|\cos x| = \frac{\pi}{2} \quad (\forall x \in R)$

Đại học Tổng hợp TP.HCM.1991

198. Tính $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^4 x dx$ biết $\int_{a-m}^{a+m} x f_{(x)} dx = 2a \int_a^{a+m} f_{(x)} dx \quad (\forall m > 0)$

Đại học Tổng hợp TP.Hồ Chí Minh.1992

ĐỀ THI NĂM 1993

199. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

Tốt nghiệp PTTH (1993)

200. Tính: $I = a^2 \int \sin^4 t dt$

201. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$

202. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \cos^3 x \sin 8x$

Trung tâm đào tạo và bồi dưỡng Y tế TP. HCM (1993)

203. Ta nói rằng hai hàm số f(x) và g(x) là trực giao với nhau trong đoạn $[-\pi,\pi]$ nếu: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x).g(x)dx = 0$

Hãy chứng tỏ rằng hàm $U_m(x) = \cos mx$ trực giao với các hàm $U_k(x) = \cos kx$ $(k \neq m)$ và $V_n(x) = \sin nx$ $(m \in N; n \in N; k \in N)$

Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. HCM (1993)

204. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi các đường :

$$y = 0 ; y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x} ; x = 0 ; x = \frac{\pi}{2}$$

Đại học Bách khoa TP. HCM (1993)

205. Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ $(n = 1, 2, 3...)$

Tính I_2. Chứng tỏ rằng $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

Đại học Ngoại thương Hà Nội (1993)

206. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$

Đại học Nông Nghiệp I

ĐỀ THI NĂM 1994

207. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin x dx$ Viện Đại học Mở Hà Nội

208. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ Cao đẳng Hải quan(2000)

209. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 3}$ Đại học Bách khoa TP.HCM

210. Tính tích phân : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ Đại học Mở TP.HCM (2000,A,B)

211-212. Tính các tích phân sau:

1/ $I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin^2 x}{3^x + 1} \right) dx$ 2/ $J = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$

Đại học Ngoại Thương

213. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$

Đại học Bách khoa Hà Nội (1994)

ĐỀ THI NĂM 1995

214. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$ Đại học Y Hà Nội

215. Tính tích phân : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$ Đại học Hàng hải

216. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$ Học viện Quan hệ Quốc tế

217. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ Đại học Bách khoa TP.HCM

218. Tính tích phân $f(t) = \int_0^t \left(4 \cos^4 x - \frac{3}{2} \right) dx$, từ đó giải phương trình: $f t) = 0$

Đại học Sư phạm

219-220. Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$

1/ Tìm hai số A, B sao cho $f(x) = A + B\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

2/ Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Đại học Sư phạm TP.HCM

221. Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [0, 1].

Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

Đại học Luật TP. HCM

222. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{9 + \cos^2 x}$ Đại học Y dược TP. HCM

223. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x}dx$ Đại học Kiến trúc Hà Nội

224. Tính tích phân : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x|dx$ Đại học Giao thông vận tải

225. Tính tích phân : $\int_0^1 x(\text{arctg}x)^2 dx$ Đại học Dược Hà Nội

226. Tính: $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ $(0 < \alpha < \pi)$

Cao đẳng Sư phạm Nam Hà

227. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{3 + \cos 2x}$

Cao đẳng Sư phạm Thanh Hoá

228. Tính tích phân : $\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx$ Đại học Sư phạm Quy Nhơn

229. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin^n x dx$ trong đó n là số tự nhiên cho trước

Học viện Quan hệ Quốc tế

230. Xét tích phân : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Chứng tỏ rằng : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ Đại học Đà Lạt

231. Tính giới hạn $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ $(n \in N)$

Đại học Ngoại thương

232. Tính tích phân : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx$ (n là số nguyên dương)

Đại học Cần Thơ

233. Tính: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{b^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x}}$ $(b, c \neq 0)$

Đại học Tài chính – Kế toán Hà Nội

234. Tính tích phân : $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

235. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx$. Chứng minh rằng $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n-1}$ với n là số tự nhiên. $n \geq 2$. Đại học Nông nghiệp I

236. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos(nx) dx$ (n là số nguyên dương)

Đại học Nông – Lâm TP. HCM

237. Tính tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Phân viện báo chí và tuyên truyền

238. Với mỗi $n \in N$. Đặt

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1+\sin\frac{2\pi}{2n}} + \ldots + \frac{1}{1+\sin\frac{k\pi}{2n}}\right)$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Đại học Quốc gla Hà Nội

239. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ Đại học Dân lập Phương Đông

240. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \cos^2 3x dx$ Viện Đại học Mở Hà Nội

ĐỀ THI NĂM 1996

241. Tính tích phân : $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x} dx$

Đại Học Quốc Gia T.P Hồ Chí Minh

242. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}} dx$ Đại học Y Hà Nội

243. Tính tích phân : $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ Đại học Lâm Nghiệp

244-245. Cho $I_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx$ với n = 2, 3, 4, ...

1. Tính I_2.
2. Chứng mlnh $I_n < \frac{\pi}{12}$ với n = 3, 4,... Cao đẳng Hải quan

246. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{16+\cos^2 t} dt$ Đại học Hàng Hải

247. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Chứng mInh rằng: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ và $I = \frac{\pi}{4}$

Đại học Giao thông

248. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos^4 x} dx$

Đại học Kỹ thuật Quân sự

249. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội

250. Tính : $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$

Đại học Tài chính – Kế toán Hà Nội

251-252. Tính tích phân :

1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + \sin x + 3}$ 2/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx$

Đại học Công Đoàn

253. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2 x dx$ Đại học Thuỷ lợi

254. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = e^{-2x}\cos 3x$

Đại học Ngoại thương

255-256. Tính tích phân : 1/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} dx$

Đại học DL Ngoại ngữ – Tin học TP.HCM

257. Tính tích phân : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x}|\sin x|dx$ Đại học Dược Hà Nội

258. Tính tích phân : $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ Đại học Y Hải Phòng

259-260. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1/ $e^x > 1 + x$ với mọi $x \neq 0$

2/ $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}}dx > \frac{4+\pi}{4}$ Đại học Xây dựng

261. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2 + \sin 2x)$

Đại học Quốc gia Hà Nội

262. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x) = \ln\frac{1}{(3-x)^3}$

và giải bất phương trình: $f'(x) > \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{x+2}dt$ Đại học Bách khoa

263. Tính tích phân : $I=\int_0^3 x^5\sqrt{1+x^2}dx$

Đại học Giao thông

264. Tính tích phân : $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ Đại học Dân lập Đông Đô

ĐỀ THI NĂM 1997

265-266. Tính các tích phân sau:

1/ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{3+2\sin x}dx$ 2/ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}5e^x\sin 2xdx$

Đại học Sư phạm Hà Nội 2

267. Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos xdx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$

Cao đẳng Sư phạm TP.HCM

268. Tính tích phân: $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+2\cos x}{3\sin x+\cos x}dx$

Cao đẳng sư phạm Hà Nội.(2000,A)

269. Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$

Đại học Dân lập Kỹ thuật công nghiệp TP.HCM

270. Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$

Đại học Dân lập Văn lang TP.Hồ Chí Minh

271. Tính tích phân : $I=\int_0^1 xe^x dx$

Đại học Quốc gia TP.HCM

272-273. Tính các tích phân sau:

1/ $I=\int_0^1(e^{2x}-\pi\sin\pi x)dx$ 2/ $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

Đại học Dân lập Văn Lang TP.HCM

274. Tính tích phân : $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đại học Dân lập Văn Lang TP.HCM

275. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

Cao đẳng BC Marketing TP.HCM

276. Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\cos x+1}dx$

Đại học Quốc gia TP.HCM

277. Đặt $I_{(t)}=\int_0^t\frac{tg^4 x}{\cos 2x}dx$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$

Tính $I_{(t)}$ và chứng minh bất đẳng thức :

$$\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right) > e^{3^{(\operatorname{tg}^3 t+3\operatorname{tg} t)}} \quad \text{với} \quad \left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$$

Đại học Quốc gia TP.HCM

278. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\dfrac{\sin 3x \sin 4x}{\operatorname{tg}x+\cot g 2x}$

Đại học Ngoại thương Hà Nội

279. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

$$f(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)$$

Học viện Quan hệ quốc tế

280. Tính tích phân : $I=\int_0^{\pi}(2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x)dx$

Đại học Nông nghiệp

281-282. Tính tích phân :

1/ $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$ 2/ $I=\int_0^{2}x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đại học Thuỷ lợi

283. Tính tích phân : $I=\int_0^{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội

284. Tính tích phân : $I=\int_0^{1}\dfrac{x^2+x+\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$

Đại học Mỏ – Địa chất

285. Tính tích phân : $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot g x dx$

Đại học Kỹ thuật Quân sự

286. Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx$

Đại học Y – Dược TP.HCM

287. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x}$

Đại học Ngoại thương TP.HCM

288. Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x dx}{2 + \cos^2 x}$

Đại học An ninh

289. Tính tích phân : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx$

Đại học An ninh, Cảnh sát

290. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

Đại học Quốc gia Hà Nội

291. Tính : $I = \int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội

292. Cho tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x tg^n x dx$ (n là số nguyên dương bất kỳ)

1/ Tính I_n khi $n = 2$.

2/ Chứng minh rằng : $I_n > \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+2}$

Đại học Bách khoa Hà Nội

293. Tính tích phân : $\int_0^{2\pi} x^2 \sin \dfrac{x}{2} dx$

Đại học Bách khoa Hà Nội

294. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin x dx$

Viện Đại học Mở Hà Nội

ĐỀ THI NĂM 1998

295. Tính tích phân sau :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x)dx$$

Đại học An ninh

296-297. Tính các tích phân sau:

$$1/\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)dx \qquad 2/\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\sqrt{\sin x}dx$$

Đại học Bách khoa

299. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos x + 1}$ Đại học Cần Thơ

300. Tính tích phân : $I = \int_{-2}^{2} \left(10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x \right) dx$

Đại học Giao thông Vận tải

301. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x}$

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

302. Tìm các giá trị của x thoả mãn phương trình:

$$\int_0^x \cos(t - x^2)dt = \sin x$$

Viện Đại học Mở Hà Nội

303. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$

Học viện Ngân hàng

304. Tính tích phân : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

Đại học Nông nghiệp I Hà Nội

305. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ Đại học Quốc gia Hà Nội

306-307. Xét các nguyên hàm sau:

1/ $\int \sin^5 x dx$ 2/ $\int \cos 5x \sin 3x dx$

Trường TH. Truyền hình

308. Xét tích phân $I_n = \int_0^1 \sin^n x dx$ với n là số nguyên dương.

Chứng minh : $\frac{[\sin(1)]^{n+1}}{n+1} < I_n < \frac{1}{n+1}$

Đại học Huế

309. Tính tích phân : $I = \int x \sin \sqrt{x} dx$ Đại học Mỏ – Địa chất

310. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 4x dx$ Đại học Ngoại ngữ

311-312. 1/ Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x.\cos 3x$

2/ Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x.\cos 2x$

Đại học Ngoại thương

313. Cho hàm số f(x) liên tục trên tập số thực R và với mọi $x \in R$ đều có: $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$

Tính : $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$ Đại học Sư phạm Hà Nội II

314. Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

Cao đẳng Sư phạm TP.HCM

315. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{11 - 7\sin x - \cos^2 x}$

Cao đẳng Hải quan

316. Cho hai tích phân sau:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 2x dx$$

1/ Tính I + J và I – J

2/ Tính I và J

Học viện Ngân hàng

317. Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$ Học viện Ngân hàng

318. Tính tích phân : $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$ Đại học Y khoa Hà Nội

319-320. 1/ Cho hai hàm số:

$f(x) = 4\cos x + 3\sin x$

$g(x) = \cos x + 2\sin x$

Tìm các số A, B thoả mãn $g(x) = Af(x) + Bf'(x)$

2/ Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x)dx}{f(x)}$ Đại học Xây dựng

321. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$

Đại học Quốc gia TP.HCM

322. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = tg^4 x$

Đại học Thương mại

323-324. 1/Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\, dx$

bằng cách biến đổi $t = \sin^2 x$

2/ Tính tích phân : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x} dx$ và

chứng minh bất đẳng thức : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)} > \frac{\pi}{12}$

Đại học Quốc gia TP.HCM

325. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình:

$y = (2 + \cos x)\sin x$ và ba đường thẳng $y = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$

ĐỀ THI NĂM 1999 Đại học Công đoàn

326. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ Đại học An ninh

327. Tính nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = tgx + \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

328. Cho hàm số : $g(x) = \sin x \sin 2x \cos 5x$ Đại học Kinh tế Quốc dân

Tìm họ nguyên hàm của hàm số g(x)

329. Tìm hai số A, B để hàm số $h(x) = \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$ có thể biểu diễn Đại học Bách khoa

được dưới dạng:

$h(x) = \frac{A\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{B\cos x}{2+\sin x}$, từ đó tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(x)dx$

Đại học Bách khoa

330. Tính tích phân : $\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}}$ Đại học Y khoa Hà Nội

331. Tính tích phân : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} x\,\text{arctg}x\,dx$

Đại học Giao thông

332. Tính tích phân : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$

Đại học Tài chính – Kế toán

333. Tính : $J = \int_{0}^{\pi} x\cos^4 x \sin^3 x dx$

Đại học Tài chính Kế toán(PB)

334. Tính tích phân : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}dx$

Đại học Tài chính Kế toán

335. Tính $\int \frac{\sin(\alpha + x)}{\cos^2 x}dx$ (α là hằng số) Đại học Xây dựng

336. Tính tích phân : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 dx$

Đại học Thủy sản Nha Trang

337. Tính tích phân : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x(1+\cos x)^2 dx$

338. Tính tất cả các giá trị của a trong khoảng [2,3] sao cho:

$$\int_{0}^{a} \cos(x + a^2)dx = \sin a$$

Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại TP.HCM

339. Chứng minh rằng: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

Từ đó tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ Đại học Giao thông

340. Tính : $\int \frac{dx}{\cos x \sin^4 x}$ Cao đẳng Giao thông

341. Tính tích phân : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

Đại học Mỏ – Địa chất

342. Tính tích phân : $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$ Đại học Đà Lạt

343. Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$

Đại học Hàng hải

344. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$

Đại học Kiến trúc Hà Nội

345. Tính tích phân : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx$

Học viện Kỹ thuật Mật mã

346. Tính tích phân : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$

Học viện Kỹ thuật Mật mã

347. Chứng minh rằng:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{tga} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot ga} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1 \quad (tga > 0)$$

Đại học Luật Hà Nội

348. Tìm họ nguyên hàm: $I = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$

Học viện Ngân hàng

349. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7+\cos 2x}}$ Cao đẳng Hải quan

350. Tính: $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ Đại học Sư phạm Vinh

351. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{3\sin 4x - \sin 6x - 3\sin 2x}$$

Đại học Sư phạm 2 Hà Nội

ĐỀ THI NĂM 2000-2001

352. Cho $f(x) = A\sin 2x + B$. Tìm A, B để :

$f'(0) = 4$, $\int_0^{2\pi} f(x)(dx) = 3$

Đại học An ninh Nhân dân

353. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sin x - \cos x}$$ Đại học Bách khoa Hà Nội

354. Tìm nguyên hàm của hàm số : $y = (x^2+2)\sin 2x$

Đại học Công đoàn

355. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$

Đại học Dược Hà Nội

356. Tính tích phân sau: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}dx$

Đại học Giao thông Vận tải

357. Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

Đại học Giao thông Vận tải

358. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \sin^4 2x$

Đại học Kinh tế Quốc dân

359. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

Đại học DL Kỹ thuật Công nghệ TP.HCM.

360. Tính: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ Đại học Lâm nghiệp

361. Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ Cao đẳng Lao động Xã hội

362. Chứng minh rằng với hai số tự nhiên m, n khác nhau:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx dx = 0$$

Đại học Luật Hà Nội

Đại học Xây dựng Hà Nội

363. Tính: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{tg^2 x+\cot g^2 x-2}dx$ Đại học Mỏ - Địa chất

363. Tính: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{tg^2 x+\cot g^2 x-2}dx$ Đại học Mỏ - Địa chất

364. Tính: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

Đại học Mỏ - Địa chất

365. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx$

Đại học Ngoại thương

366. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+2}dx$

Đại học Ngoại thương

367. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Học viện Ngân hàng (D)

Đại học Quốc gia Hà Nội

368. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin 2x}$

Học viện Ngân hàng (A)

Đại học Quốc gia Hà Nội (A

369. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,tg^2x\,dx$

Đại học Nông nghiệp I

370. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\,dx$

Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh

371. Tính tích phân: $J=\int_0^1 e^x\sin^2(\pi x)dx$

Đại học Quốc gia TP.HCM

372. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\sin x}$

Học viện Quan hệ Quốc tế

373. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$

Học viện Quan hệ Quốc tế

374. Tính tích phân: $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ (a là hằng số dương)

Đại học Sư phạm Hà Nội

Học viện Hành chính Quốc gia

375. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10} x + \sin^{10} x - \cos^4 x \sin^4 x)dx$

Đại học Sư phạm 2 Hà Nội

376. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{12} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cot gx}{x}\,dx \le \dfrac{1}{3}$

Đại học Sư phạm Vinh

377. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = 0$$ với mọi n nguyên

Đại học Thái Nguyên

378. Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$

Đại học Thủy Lợi Hà Nội

379. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\,dx$

Đại học Thương mại

380. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin x \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{3}$

381. Tính tích phân: $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx$ Đại học Y Hà Nội

383. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong có phương trình $y = \sin^2 x \cos^3 x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$

Đại học Bách khoa Hà Nội

384. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \sin|x| \; ; \; y = |x| - \pi$$

Viện Đại học Mở

385. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} \; ; y = \frac{1}{\cos^2 x} \; ; x = \frac{\pi}{6} \; ; x = \frac{\pi}{3}$$

Học viện Kỹ thuật Quân sự

386. Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} \left(e^{x^2} \sin x + e^x x^2\right) dx$

Đại học Thái Nguyên

387. Tính tích phân: $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x dx$

Cao đẳng Sư phạm NT-MG TW1

388. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cos 5x dx$

Đại học Hồng Đức

389. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

Đại học Đà Lạt

390. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \cos 5x tgx$

Đại học Ngoại thương, cơ sở II TP.HCM

391. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \cos 3x tgx$

Đại học Ngoại thương, cơ sở II TP.HCM

392. Tính tích phân: $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$

Đại học Y Hải Phòng

393. Tính: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2-\cos^2 x}$ Đại học Y Thái Bình

394. Tính tích phân: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$ Đại học Cần Thơ

395. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

Đại học Cần Thơ

396. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2000}}} \le \frac{\pi}{4}$$

Đại học Đà Nẵng

397. Tính tích phân: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

Đại học Đà Nẵng

398. Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}\,dx$

Đại học Huế

399. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx$

Học viện Chính trị Quốc gia TP.HCM

400. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

Đại học Dân lập Duy Tân TP.HCM

CHƯƠNG III

PHẦN HƯỚNG DẪN

BÀI 1

Tính: 1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx$ 2/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot gx\,dx$

GIẢI

1/ Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos x}{\cos x}$

$$= -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2}}$$

2/ Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot gx\,dx$

Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot gx\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$$= \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\sin\frac{\pi}{2} - \ln\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2}}$$

BÀI 2

Tính: $1/\ I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$ $\qquad 2/\ I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

GIẢI

1/ Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$$

2/ Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

BÀI 3

Tính: 1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx$ 2/ $I = \int_{\pi/6}^{\frac{\pi}{4}} \cot g^2 x dx$

GIẢI

1/ $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 x + 1 - 1) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$

$$= (tgx - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 1 - \frac{\pi}{4}}$$

2/ $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot g^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cot g^2 x + 1 - 1) dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx$$

$$= (-\cot gx)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\left(1 + \sqrt{3}\right), \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\left(1 + \sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{12}}$$

BÀI 4

Tính: 1/ $\int \cos^3 x dx$ 2/ $\int \sin^4 x dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x) d\sin x$$

$$= \int d\sin x - \int \sin^2 x d\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C}$$

2/ $J = \int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C}$$

BÀI 5

Tính: $\int tg^3 x dx$

GIẢI

Ta có: $J = \int tg^3 x dx = \int tg^2 x tgx dx$

$$= \int (tg^2x + 1 - 1)tgxdx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} tgxdx - \int tgxdx$$

$$= \int tgxdx(tgx) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} tg^2x + \int \frac{d\cos x}{\cos x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{1}{2} tg^2x + \ln|\cos x| + C}$$

BÀI 6

Cho: $\mathbf{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx}$, **tính** $\mathbf{I_1, I_2}$

GIẢI

Khi $n = 1$

Ta có : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos x$

$$= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 1}$$

Khi $n = 2$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

$$= \int (tg^2x + 1 - 1)tgxdx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} tgxdx - \int tgxdx$$

$$= \int tgxdx(tgx) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} tg^2x + \int \frac{d\cos x}{\cos x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{1}{2} tg^2x + \ln|\cos x| + C}$$

BÀI 6

Cho: $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad$ **tính** I_1, I_2

GIẢI

Khi $\quad n = 1$

Ta có : $\quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos x$

$$= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 1}$$

Khi n = 2

$$\Rightarrow \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0^\circ)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$$

BÀI 7

Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\sin x}$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\cos\frac{x}{2}.2d\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \cot g\frac{x}{2}\, dtg\frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{dtg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C}$$

2/ Ta có: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} 2d\frac{x}{2}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-tg^2\frac{x}{2}} dtg\frac{x}{2}.$$

Biết $$\frac{1}{1-tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-tg\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+tg\frac{x}{2}}\right)$$

nên $$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dtg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dtg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}$$

$$= \left[-\ln\left|1-tg\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \ln(1+\sqrt{2})}$$

Cách khác:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx \qquad (1)$$

Tính: $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$= \ln|1+\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

và $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right) = \ln\sqrt{2}$$

Do đó $$(1) \Rightarrow J = \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

BÀI 8

Tính: $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

GIẢI

$$J = \int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\int \left(1+\cot g^2 x\right)^2 d\cot gx$$

$$= -\int \left(1+2\cot g^2 x + \cot g^4 x\right) d\cot gx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\cot gx - \frac{2}{3}\cot g^3 x - \frac{1}{5}\cot g^5 x + C}$$

BÀI 9

Tính: 1/ $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ 2/ $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

GIẢI

1/ Ta có: $$I = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= -\int \cos^{-2} x \, d\cos x$$

$$= \frac{-\cos^{-2+1} x}{-2+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{\cos x} + C}$$

2/ Ta có: $$J = \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$$

$$= 2\int dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= 2x - \int dtgx + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = 2x - tgx + C}$$

Chú ý : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

BÀI 10

Tính: 1/ $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 2/ $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $$I = \int \frac{\cos dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^{\frac{2}{3}} x}$$

$$= \int \sin^{-\frac{2}{3}} x \, d\sin x = \frac{\sin^{-\frac{2}{3}+1} x}{-\frac{2}{3}+1} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 3\sqrt[3]{\sin x} + C}$$

2/ Ta có: $$J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int tg^2 x (1 + tg^2 x) dtgx = \int tg^2 x dtgx + \int tg^4 x dtgx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x + C}$$

BÀI 11

Tính: 1/ $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x}$ 2/ $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^4 x dtgx$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{1}{5} tg^5 x + C}$

2/ Ta có: $J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x (\sin x dx)}{\cos^4 x}$

$$= -\int \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^4 x}$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= -\int \cos^{-4} x d(\cos x) + \int \cos^{-2} x d(\cos x)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{J = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C}$

BÀI 12-13

Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$ 2/ $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^3}$

$$= 8\int \frac{dx}{\sin^3 2x} = 8\int \frac{dx}{\left(\frac{2tgx}{1+tg^2 x}\right)^3}$$

$$= \int \frac{(1+tg^2 x)^3}{tg^3 x} dx = \int \frac{(1+tg^2 x)^2 (1+tg^2 x) dx}{tg^3 x}$$

$$= \int \frac{1+2tg^2x+tg^4x}{tg^3x} d(tgx)$$

$$= \int tg^{-3}x d(tgx) + 2\int \frac{d(tgx)}{tgx} + \int tgx d(tgx)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{-1}{2tg^2x} + 2\ln|tgx| + \frac{1}{2}tg^2x + C}$$

Cách khác:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$$

$$= \int \cot gx \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \cot gx(1+\cot g^2x)(1+tg^2x)d(tgx)$$

$$= \int (\cot gx + \cot g^3x)(1+tg^2x)d(tgx)$$

$$= \int (\cot gx + tgx + \cot g^3x + \cot gx)d(tgx)$$

$$= \int (2\cot gx + tgx + \cot g^3x)d(tgx)$$

$$= 2\int \frac{d(tgx)}{tgx} + \int tgx d(tgx) + \int \frac{d(tgx)}{tg^3x}$$

$$I = 2\ln|tgx| + \frac{1}{2}tg^2x + \int tg^{-3}x d(tgx)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{-1}{2tg^2x} + 2\ln|tgx| + \frac{1}{2}tg^2x + C}$$

2/ Ta có: $$J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\frac{dx}{\cos^2 x} \qquad (1)$$

Biết $$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

=> $$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{16}\sin^4 2x$$

và $$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{16}\sin^4 2x = \frac{1}{16}\left(\frac{2tgx}{1+tg^2x}\right)^4$$

Đặt $t = tgx$

$$\Rightarrow \quad dt = (1+tg^2x)dx = (1+t^2)dx$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Từ (1) ta suy ra:

$$J = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{16}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4} = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{t^4}$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^3}{t^4} dt$$

$$= \int \left(t^{-4} + 3t^{-2} + 3 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{-1}{3tg^3x} - \frac{3}{tgx} + 3tgx + \ln|tgx| + C}$$

BÀI 14

Tính: 1/ $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ 2/ $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sin^4 x}$

$$= \int tgx \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \int tgx(1+\cot g^2 x)(-d(\cot gx))$$

$$= -\int \frac{d(\cot gx)}{\cot gx} - \int \cot gx d(\cot gx)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\ln|\cot gx| - \frac{1}{2}\cot g^2 x + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x} dx$

$$\int tg^2 x(1+tg^2 x)dtgx = \int tg^2 x dtgx + \int tg^4 x dtgx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = tgx - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

BÀI 15-17

Tính: 1/ $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ 2/ $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ 3/ $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{2d\frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\cot g \frac{x}{2} + C}$$

2/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{-2d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C}$$

3/ Ta có: $I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x}$

Đặt $u = \pi - x$ Khi $x = 0$ thì $u = \pi$

$\Rightarrow$ $du = -dx$ $x = \pi$ thì $u = 0$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - u)(-du)}{1+\sin u} = -\int_{\pi}^{0} \frac{\pi du}{1+\sin u} + \int_{\pi}^{0} \frac{udu}{1+\sin u}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{du}{1+\sin u} - \int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{du}{1+\sin u} - I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2}\left[-tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{I = \pi}$$

BÀI 18

Tính : 1/ $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$ 2/ $\int (tg^2 x + tg^4 x) dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$

$$= \int tg^2 \frac{x}{2} dx = \int tg^2 \frac{x}{2} \cdot 2d\frac{x}{2}$$

$$= 2\int \left(tg^2 \frac{x}{2} + 1 - 1\right) d\frac{x}{2}$$

$$= 2\int dtg\frac{x}{2} - 2\int d\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 2tg\frac{x}{2} - x + C}$$

2/ Ta có: $J = \int(tg^2x + tg^4x)dx$

$= \int tg^2x(1 + tg^2x)dx$

$= \int tg^2x\,dtgx$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{1}{3}tg^3x + C}$$

Chú ý: $dtgx = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

$dtgx = (1 + tg^2x)dx$

$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$

BÀI 19

Tính: 1/ $\int \dfrac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}$ 2/ $\int \cos x \sin 3x dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \dfrac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}$

$= \int \dfrac{d\sin 2x}{2 + \sin 2x} = \int \dfrac{d(2 + \sin 2x)}{2 + \sin 2x}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \ln(2 + \sin 2x) + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \cos x \sin 3x dx$

Biết $\cos a \sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

nên $\cos x \sin 3x = \dfrac{1}{2}[\sin(4x) - \sin(-2x)]$

Do đó: $J = \frac{1}{2}\int(\sin 4x + \sin 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

Cách khác:

$$J = \int \cos x \sin 3x dx = \int \sin 3x \cos x dx$$

$$= \int \sin 3x d\sin x = \int (3\sin x - 4\sin^3 x) d\sin x$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2 x - \sin^4 x + C = \frac{3}{2}(1-\cos 2x) - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{1}{8}(2\cos 2x + \cos 4x) + C}$$

BÀI 20-21

Tính : **1/** $\int \cos 2x \cos 3x dx$ **2/** $\int \sin 2x \sin 5x dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \cos 2x \cos 3x dx$ (1)

Biết $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

nên $\cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x)$

(1) $\Rightarrow$ $J = \frac{1}{2}\int(\cos 5x + \cos x)dx$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \sin 2x \sin 5x dx$

Biết $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\Rightarrow$ $\sin 2x \sin 5x = \sin 5x \sin 2x$

$$= \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$$

Do đó: $$J = \frac{1}{2}\int(\cos 3x - \cos 7x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\sin 7x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C}$$

BÀI 22-23

Tính: 1/ $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$ 2/ $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

$$= \int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^4 x} = \int\frac{(1-\sin^2 x)d\sin x}{\sin^4 x}$$

$$= \int\sin^{-4} x d\sin x - \int\sin^{-2} x d\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C}$$

2/ Ta có: $J = \int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^{\frac{1}{2}} x}$

$$= -\int\cos^{-\frac{1}{2}} x d\cos x + \int\cos^{\frac{3}{2}} x d\cos x$$

$$= \frac{-\cos^{-\frac{1}{2}+1} x}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{\cos^{\frac{3}{2}+1} x}{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + C}$$

Tính các tích phân sau: 1/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$ 2/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+\cos x}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln(1+\sqrt{2})$ (Bài 7)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos x}{\cos x} - \ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln\sqrt{2}$$

Do đó: $I = \ln(1+\sqrt{2}) + \ln\sqrt{2} = \boxed{\ln(2+\sqrt{2})}$

2/ Ta có: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+\cos x}dx$ (1)

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - u$

$\Rightarrow$ $dx = -du$

$$\sin x + \cos x = \cos u + \sin u = \sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)}{\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}du}{\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)} - J$$

$$2J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(u + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$J = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(xem bài 7)}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left(tg\frac{3\pi}{8}\right) - \ln\left(tg\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \ln\left(\frac{tg\frac{3\pi}{8}}{tg\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Chú ý: $tg\frac{\pi}{8}$ và $tg\frac{3\pi}{8}$

$$tg\frac{\pi}{4} = \frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1 - tg^2\frac{\pi}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

và $$tg\frac{3\pi}{8} = \cot g\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\ln\left(\frac{tg\frac{3\pi}{8}}{tg\frac{\pi}{8}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

Biết $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Suy ra: $\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 2x . \cos 3x \cos x$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x + 1 + \cos 4x)$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{24}(\sin 3\pi - \sin 0°) + \frac{1}{8}(\sin \pi - \sin 0°) + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}(\sin 4\pi - \sin 0°)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{\pi}{8}}$

BÀI 27

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$

GIẢI

Ta có: $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$$

Biết $$\sin^3 x \cos^3 x = \frac{1}{8}\sin^3 2x$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4}$$

$$= \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 6x$$

Do đó: $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$$

$$= \frac{3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 6x dx$$

$$= -\frac{3}{64}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{192}\cos 6x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{12}}$$

BÀI 28

Tính: $$1/\ I = \int x \sin 2x dx \qquad 2/\ J = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

GIẢI

1/ Ta có: $$I = \int x \sin 2x dx \qquad (1)$$

Biết $$d\cos 2x = -2\sin 2x dx$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x dx = -\frac{1}{2} d\cos 2x$$

$$(1) \quad \Rightarrow I = \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int x d\cos 2x$$

Từ phép tính tích phân từng phần suy ra:

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

2/ Tính: $J = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

Ta có: $J = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{\cos x}} = -\int \cos^{-\frac{1}{2}} x\, d(\cos x)$

$$= \frac{-\cos^{-\frac{1}{2}+1} x}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = -2\sqrt{\cos x} + C}$$

BÀI 29

Tính : $I = \int_0^1 \text{arctg}\sqrt{x}dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^1 \text{arctg}\sqrt{x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = \text{arctg}\sqrt{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ v = x \end{cases}$

Do đó: $I = \int_0^1 \text{arctg}\sqrt{x}dx = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vdu$

$$= x\,\text{arctg}\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_1 \qquad (1)$$

Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ (2)

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$

$\Rightarrow dx = 2tdt$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

(2) $\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{t2tdt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$= 2[t - \text{arctgt}]\Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

(1) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$

BÀI 30

Tính : $I = \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}} = \int \arcsin x (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1)$

Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x & \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1) \Rightarrow v = 2\sqrt{1+x} \end{cases}$

$I = uv - \int vdu = 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C$

$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + C$

$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + C$

$\Rightarrow \boxed{I = 2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C}$

BÀI 31

Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow I = \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4 dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right]\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{6}}$$

BÀI 32-33

Tính: 1/ $\int x \arccos\frac{1}{x}\,dx$ 2/ $\int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int x \arccos\frac{1}{x}\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arccos\dfrac{1}{x} \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\dfrac{1}{x^2}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = uv - \int vdu = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{dx}{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\int(x^2-1)^{\frac{1}{2}}d(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C}$$

2/ Ta có: $J = \int\frac{\arccos x}{x^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arccos x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$J = -\frac{1}{x}\arccos x - \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x}\arccos x - J_1 \qquad (1)$$

Tính J_1: $J_1 = \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Đặt $x = \sin t \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad dx = d\sin t = -\cos t dt$

$x\sqrt{1-x^2} = \sin t \,.\, \sqrt{1-\sin^2 t} = \sin t\cos t$

$$J_1 = \int\frac{\cos t dt}{\sin t\cos t} = \int\frac{dt}{\sin t} = \ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C \qquad (2)$$

Tính $tg\frac{t}{2}$

Biết $x = \sin t = \dfrac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}} \Rightarrow xtg^2\frac{t}{2} - 2tg\frac{t}{2} + x = 0$

Suy ra $$\text{tg}\frac{t}{2}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Từ (2) suy ra $$J_1=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C \qquad (3)$$

Thế J_1 ở (3) vào (1) ta được:

$$\Rightarrow \boxed{J=-\frac{1}{x}\arccos x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C}$$

BÀI 34

Tính tích phân: $$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\arcsin x\,dx$$

GIẢI

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\arcsin x\,dx$$

Đặt $$\begin{cases}u=\arcsin x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$$

Do đó: $$I=uv\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}vdu=\frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{\pi^2}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi^2}{48}-\frac{1}{2}J_1+\frac{1}{2}J_2$$

Tính $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$

$J_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1-x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

$J_2 = x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

$J_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - J_2$

$\Rightarrow \quad J_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$

Do đó: $I = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right)$

$= \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{24}$

$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}}$

BÀI 35

Tính tích phân : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\text{arctgx}}{x^2}\,dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{arctgx}{x^2} dx$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = arctgx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$(1) \Rightarrow I = uv\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} vdu = -\frac{1}{x} arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + J$ (2)

Tính $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$

$= \ln x\Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$J = \ln\sqrt{\frac{3}{2}} = \ln\frac{\sqrt{6}}{2}$ (3)

Thế J ở (3) vào (2) ta có:

$\Rightarrow$ $\boxed{J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{6}}{2}}$

BÀI 36-37

Tính: $1/\ I = \int \frac{arctgxdx}{x^3}$ $2/\ I = \int \frac{arctgxdx}{x^4}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{arctgxdx}{x^3}$

$= \int x^{-3} arctgxdx = \frac{-1}{2} \int arctgxd(x^{-2})$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = -\frac{1}{2}\text{arctgx} \\ dv = dx^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$I = uv - \int vdu = -\frac{1}{2x^2}\text{arctgx} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\text{arctgx} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\text{arctgx} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\text{arctgx} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\text{arctgx} - \frac{1}{2x} + C}$$

$$2/\ I = \int\frac{\text{arctgx}dx}{x^3} = -\frac{1}{3}\int\text{arctgx}d(x^{-3}) \qquad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \text{arcsinx} \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = x^{-3} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow J = -\frac{1}{3x^3}\text{arctgx} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^3(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{3x^3}\text{arctgx} + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{1}{3x^3}\text{arctgx} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{|x|} + C}$$

BÀI 38

Tính: $I = \int\frac{x^4\text{arctgx}}{1+x^2}dx$

GIẢI

Đặt $\text{arctgx} = t \Rightarrow x = tgt\ ,\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$

$$I = \int \frac{ttg^4 t \dfrac{1}{\cos^2 t}dt}{1+tg^2 t} = \int ttg^4 tdt$$

$$= \int ttg^2 t\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt$$

$$= \int ttg^2 td(tgt) - \int ttg^2 tdt$$

$$= \frac{1}{3}\int td(tg^3 t) - \int ttg^2 tdt = \frac{1}{3}J_1 - J_2$$

$$J_1 = \int tdtg^3 t = ttg^3 t - \int tg^3 tdt$$

Biến đổi về x = tgt ta có:

$$J_1 = \int tdtg^3 t = \text{arctgx}.x^3 - \int x^3 \cos^2 xdx$$

$$= x^3\text{arctgx} - \int x^3 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x^3\text{arctgx} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx^2$$

$$= x^3\text{arctgx} - \frac{1}{2}\int dx^2 + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2}$$

$$= x^3\text{arctgx} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$$

$$J_2 = \int ttg^2 tdt = \int t\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt$$

$$= \int tdtgt - \frac{t^2}{2}$$

$$= ttgt - \int tgtdt - \frac{t^2}{2}$$

$$= ttgt - \frac{t^2}{2} - \int x\cos^2 t\,dx$$

$$= x\,arctgx - \frac{1}{2}arctg^2 x - \int x\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x\,arctgx - \frac{1}{2}arctg^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{3}x^3 arctgx - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) - x\,arctgx + \frac{1}{2}arctg^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \left(\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}arctgx\right)arctgx + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{6} + C}$$

BÀI 39

Tính: $\quad I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\,dx$

GIẢI

Đặt $\begin{cases} u = (\arcsin x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\arcsin x\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

$$I = uv\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} vdu = x(\arcsin x)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi^2}{72} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,d\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi^2}{72} + 2J \quad (*)$$

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$

Lại đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = d\sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$J = uv\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} vdu$$

$$= \sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$J = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2}$$

Thay vào (*) ta được: $\boxed{I = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1}$

BÀI 40

Tính tích phân : $I = \int_0^1 \text{arctg}\sqrt{2x+1}dx$

GIẢI

Ta có : $I = \int_0^1 \text{arctg}\sqrt{2x+1}dx$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = \text{arctg}\sqrt{2x+1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow I = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vdu = x\text{arctg}\sqrt{2x+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}J \qquad (2)$$

Tính $J = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

Đặt $t = \sqrt{2x+1}$

$\Rightarrow$ $t^2 = 2x + 1$

$\Rightarrow$ $tdt = dx$

Ta có: $x = \frac{t^2-1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x+1 = \frac{t^2-1}{2} + 1 = \frac{t^2-1}{2}$$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$

Do đó: $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{t^2-1}{2} t dt}{\frac{t^2+1}{2} t} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-2}{t^2+1} dt = (t - 2\text{arctgt})\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$J = \left[\left(\sqrt{3} - 2\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \left(1 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6} \qquad (3)$$

Thế J ở (3) vào (2) ta được:

$$I = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}$$

BÀI 41-42

Tính: 1/ $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ 2/ $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

GIẢI

1/ Ta có : $I = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2\int \arcsin\sqrt{x}\, d\left(\sqrt{1-x}\right)$

Đặt $\begin{cases} u = -2\arcsin\sqrt{x} \\ dv = d(\sqrt{1-x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = d(\arcsin\sqrt{x}) = \frac{-dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \\ v = \sqrt{1-x} \end{cases}$

Do đó: $I = uv - \int v du$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} - 2\int\sqrt{1-x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + C_1$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \int x^{-\frac{1}{2}}dx + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C}$$

2/ Ta có: $J = \int\frac{x\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \arccos x \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Khi đó : $J = uv - \int vdu$

$$= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx + C$$

$$= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x)}{1-x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x)}{1+x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C}$$

BÀI 43-44

Tính: **1/** $\int xtg^2xdx$ **2/** $\int x\cos^2 xdx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int xtg^2xdx$

$$= \int x(1+tg^2x-1)dx$$

$$= \int x(1+tg^2x)dx - \int xdx$$

$$= \int xdtgx - \frac{1}{2}x^2 + C \qquad (1)$$

Tính $\int xd(tgx)$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = dtgx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = tgx \end{cases}$

$$\int xdtgx = xtgx - \int tgxdx + C$$

$$= xtgx - \ln|\cos x| + C \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\Rightarrow \boxed{I = xtgx - \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C}$$

2/ Ta có : $J = \int x\cos^2 xdx$

$$= \int x\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x\cos 2xdx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int xd(\sin 2x) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2xdx + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C}$$

BÀI 45

Tính: $I = \int e^x \sin xdx$

GIẢI

Ta có: $I = \int e^x \sin xdx$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow I = uv - \int vdu = e^x \sin x - \int e^x \cos dx = e^x \sin x - J$ (2)

$J = \int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = de^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$J = uv - \int vdu = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$

$= e^x \cos x + I$ (3)

Thế J ở (3) vào (2) ta được:

$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I)$

$2I = e^x (\sin x - \cos x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)}$

BÀI 46

Tính: $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$

$= \int_0^{\pi} e^{2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} (I_1 - I_2)$

Tính I_1: $I_1 = \int_0^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} de^{2x} = \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1)$ (1)

Tính I_2: $I_2 = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x de^{2x}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\cos 2x \\ dv = de^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin 2x dx \\ v = e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = uv\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v du = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x de^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi}-1\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x de^{2x} \qquad (2)$$

Tính $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x de^{2x}$

Đặt $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = de^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = e^{2x} \end{cases}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2x dx = -I_2 \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) :

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi}-1\right) - I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\left(e^{2\pi}-1\right) \qquad (4)$$

Thế (4), (1) vào (a) ta được:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2\pi}-1\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2\pi}-1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{8}\left(e^{2\pi}-1\right)}$$

BÀI 47

Tính: $I = \int e^{ax}\cos nx dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int e^{ax} \cos nx dx$

$$= \int \cos nx (e^{ax} dx) = \frac{1}{a} \int \cos nx d(e^{ax})$$

Đặt $\begin{cases} u = \cos nx \\ dv = de^{ax} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n \sin nx dx \\ v = e^{ax} \end{cases}$

Do đó:

$$I = \frac{1}{a}(uv - \int vdu) = \frac{1}{a}(e^{ax} \cos nx + n \int e^{ax} \sin nx dx)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a^2} \int \sin nx d(e^{ax}) + C \qquad (1)$$

Tính $\int \sin nx d(e^{ax})$

Đặt $\begin{cases} u = \sin nx \\ dv = d(e^{ax}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n \cos nx dx \\ v = e^{ax} \end{cases}$

$$\int \sin nx d(e^{ax}) = e^{ax} \sin nx - n \int e^{ax} \cos nx dx + C \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1):

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin nx - \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \cos nx dx + C$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin nx - \frac{n^2}{a^2} I + C$$

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin nx + C$$

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} I = e^{ax} \left(\frac{\cos nx}{a} + \frac{n \sin nx}{a^2} \right) + C$$

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} I = \frac{e^{ax}}{a^2} (a \cos nx + n \sin nx) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{e^{ax}}{n^2 + a^2} (a \cos nx + n \sin nx) + C}$$

BÀI 48

Tính : $I = \int \frac{1+e^{arctgx}}{1+x^2} dx$

GIẢI

Ta có:

$$I = \int \frac{1+e^{arctgx}}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx$$
$$= arctgx + \int e^{arctgx} d(arctgx) + C$$
$$= arctgx + e^{arctgx} + C$$

Chú ý: Biết $\int e^x dx = \int de^x = e^x$

Suy ra: $\int e^{arctgx} d(arctgx) = e^{arctgx} + C$

BÀI 49-50

Tính : **1/** $I = \int \sin x \ln(tgx) dx$ **2/** $J = \int \sin(\ln x) dx$

GIẢI

1/ Ta có : $I = \int \sin x \ln(tgx) dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(tgx) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1+tg^2 x}{tgx} dx = \frac{2dx}{\sin 2x} \\ v = -\cos x \end{cases}$

Do đó:

$$I = uv - \int vdu = -\cos x \ln(tgx) - \int \frac{dx}{\sin x}$$
$$= -\cos x \ln(tgx) + \int \frac{\cos \frac{x}{2} 2d\frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} + C$$
$$= -\cos x \ln(tgx) + \int cotg \frac{x}{2} d\left(tg \frac{x}{2}\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\cos x \ln(tgx) + \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \sin(\ln x) dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Do đó: $J = uv - \int vdu = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx + C$ (1)

Tính $\int \cos(\ln x)dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx + C \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$J = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - J + C$$

$$\Rightarrow \qquad J = \frac{1}{2}x\,[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

BÀI 51

Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

GIẢI

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

BÀI 52

Tính tích phân: $\int_1^e x\ln^2 x\,dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_1^e x\ln^2 x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\ln x\dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\,dx$$

Tính $\int_1^e x\ln x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

Vậy $\boxed{I = \frac{1}{4}(e^2 - 1)}$

BÀI 53

Tính: $I = \int\sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x\,dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int\sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x\,dx$

Đặt $1+\cos^2 x = u^2$

$\Rightarrow$ $-2\cos x\sin x\,dx = 2u\,du$

$-\sin 2x\,dx = 2u\,du$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$= 2(u^2 - 1) - 1 = 2u^2 - 3$$

Do đó:

$$I = \int u(2u^2 - 3)(-2u\,du)$$

$$= \int (-4u^4 + 6u^2)\,du$$

$$= -\frac{4}{5}u^5 + 2u^3 + C$$

$$= -\frac{4}{5}\sqrt{(1+\cos^2 x)^5} + 2\sqrt{(1+\cos^2 x)^3} + C$$

$$= \sqrt{(1+\cos^2 x)^3}\left[2 - \frac{4}{5}(1+\cos^2 x)\right] + C$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}}{5}\left[6 - 4 - 4\cos^2 x\right]$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(1 - 2\cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{2}{5}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}\cos 2x}$$

BÀI 54

Tính: $$I = \int \frac{\ln tgx}{\sin x \cos x}\,dx$$

GIẢI

Ta có: $$I = \int \frac{\ln tgx}{\sin x \cos x}\,dx$$

Đặt $u = \ln tgx$

$$\Rightarrow \quad tgx = e^u,$$

$$\cot gx = \frac{1}{e^u} = e^{-u}$$

$$\Rightarrow \quad dtgx = de^u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x}dx = de^u$$

$$\Rightarrow \quad dx = \cos^2 x de^u$$

Do đó: $I = \int \frac{u\cos^2 x de^u}{\sin x \cos x}$

$$= \int u \cot gx de^u = \int u \cdot \frac{1}{e^u} \cdot e^u du$$

$$= \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2}(\ln tgx)^2 + C}$$

BÀI 55-56

Tính: $1/\ I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ $\qquad 2/\ J = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Đặt $u = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dx = 2\sqrt{x}\, du = 2udu$$

Suy ra: $I = \int \frac{\cos u.2udu}{u} = 2\int \cos u du = 2\sin u + C$

Vậy $\boxed{I = 2\sin\sqrt{x} + C}$

2/ Ta có: $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$= \int (1+\cot g^2 x)\, d(tgx)$$

$$= \int dtgx + \int \frac{1}{tg^2 x}\, d(tgx)$$

$$= tgx + \int tg^{-2} x\, d(tgx)$$

$$= \left(tgx - \frac{1}{tgx} \right) + C$$

$$= (tgx - \cot gx) + C$$

$\Rightarrow$ $\boxed{J = -2\cot g2x + C}$

BÀI 57-58

Tính: 1/ $I = \int (1 - tg3x)^2\, dx$ 2/ $J = \int \left(\sqrt{\sin x} + \cos x\right)^2 dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int (1 - tg3x)^2\, dx$

$$= \int (1 - 2tg3x + tg^2 3x)\, dx$$

$$= \int dx - 2\int tg3x\, dx + \int tg^2 3x\, dx$$

$$= x - 2\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \left(\frac{1}{3} d3x \right) + \frac{1}{3} \int tg^2 3x\, d(3x)$$

$$= x + \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} + \frac{1}{3} \int (tg^2 3x + 1 - 1)\, d(3x)$$

$$= x + \frac{2}{3} \ln|\cos 3x| + \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} - \frac{1}{3} \cdot 3x + C$$

$$= x + \frac{2}{3} \ln|\cos 3x| + \frac{1}{3} tg3x - x + C$$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{2}{3} \ln|\cos 3x| + \frac{1}{3} tg3x + C}$

2/ Ta có: $J = \int\left(\sqrt{\sin x} + \cos x\right)^2 dx$

$$= \int\left(\sin x + 2\sqrt{\sin x}\cos x + \cos^2 x\right)dx$$

$$= \int \sin x dx + 2\int \sqrt{\sin x} d\sin x + \int(\cos^2 x)dx$$

$$= -\cos x + 2\int \sin^{\frac{1}{2}} x d(\sin x) + \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= -\cos x + \frac{2\sin^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\cos x + \frac{4}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

BÀI 59

Tính: $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2(\ln x)dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos^2(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\cos(\ln x)\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$I = uv - \int vdu = x\cos^2(\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(2\ln x)dx$$

$$I = -1 + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(2\ln x)dx = -1 + J_1 \qquad (1)$$

Tính J_1

$$J_1 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(2\ln x)dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \sin(2\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$J_1 = x\sin(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - 2\int\cos(2\ln x)dx = -2J_2 \qquad (2)$$

Tính $J_2 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(2\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos(2\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin(2\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$J_2 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(2\ln x)dx = x\cos(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + 2\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(2\ln x)dx$$

$$J_2 = -(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) + 2J_1 = -(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) - 4J_2$$

$$J_2 = -\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \qquad (3)$$

Từ (2) suy ra: $J_1 = \dfrac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$

Thế J_1 vào (1) ta được:

$$I = -1 + \frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) = \frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

BÀI 60

Tính: $I = \int \cos x \ln(1+\cos x)dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int \cos x \ln(1+\cos x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$I = uv - \int vdu = \sin x \ln(1+\cos x) + \int \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx + C$

$= \sin x \ln(1+\cos x) + \int (1-\cos x)dx + C$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \sin x \ln(1+\cos x) + x - \sin x + C}$

BÀI 61

Tính tích phân: 1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ 2/ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x d(\sin x)$

$= \dfrac{1}{4}\sin^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\sin^4 \dfrac{\pi}{2} - \sin 0^\circ\right) = \dfrac{1}{4}$

2/ Ta có: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$

Đặt $u = e^{\sin x}$

$\Rightarrow$ $du = e^{\sin x} \cos x dx$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = e^1 = e \end{cases}$

Do đó: $J = \int_1^e du = u\Big|_1^e = e - 1$

BÀI 62

Tính: $I = \int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

Biết $d(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)dx$ nên

$$I = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^{\frac{1}{3}}} = \int (\sin x \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}\left[(\sin x - \cos x)^2\right]^{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x)^{\frac{1}{3}} + C$$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C}$

BÀI 63

Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot g x}}$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot g x}} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cot g^{\frac{1}{4}} x}$

$$= -\int \cot g^{\frac{1}{4}} x \, d(\cot g x) = \frac{-\cot g^{\frac{1}{4}+1} x}{-\frac{1}{4}+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot g^3 x} + C}$$

BÀI 64

Tính: 1/ $I = \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$ 2/ $J = \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$

$$= \int arctgx \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int arctgx \, d(arctgx)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2} arctg^2 x + C}$$

2/ $J = \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{2\sqrt{x(x+1)}} \\ v = x \end{cases}$

$J = uv - \int v du$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x}(x+1)} \qquad (1)$$

Tính $\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int\frac{(\sqrt{x})^2}{x+1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= \int\frac{(\sqrt{x})^2 d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$$

$$= \int\frac{(\sqrt{x})^2+1-1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x} = \int d\sqrt{x} - \int\frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$$

$$= \sqrt{x} - \text{arctg}\sqrt{x} + C \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\Rightarrow \boxed{J = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \text{arctg}\sqrt{x} + C}$$

BÀI 65

Tính: $I = \int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

GIẢI

Ta có : $I = \int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \int(\arcsin x)^{-2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int(\arcsin x)^{-2} d(\arcsin x)$$

$$= \frac{(\arcsin x)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-1}{\arcsin x} + C}$$

BÀI 66

Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{dtgx}{2 + tg^2 x}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}d\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)}{2\left[1+\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Có thể áp dụng công thức:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

BÀI 67

Tính: $I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{2 + 1 - 2\sin^2 x}}$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3\left(1 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)^2\right)}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} d\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)}{\sqrt{3}\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) + C}$$

Áp dụng công thức: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

BÀI 68

Tính: $\quad I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2} d(2\sin^2 x - 1)}{\frac{1}{2}\left[(2\sin^2 x - 1)^2 + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(2\sin^2 x - 1)}{1 + (2\sin^2 x - 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2\sin^2 x - 1) + C$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-\cos 2x) + C}$$

BÀI 69

Tính: $\quad I = \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x}$

GIẢI

Ta có: $I = \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x \sin x \cos x dx}{1 + \cos^2 x}$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\cos^2 x d(\cos^2 x)}{1 + \cos^2 x} \qquad (1)$$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{[(\cos^2 x + 1) - 1]d(\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int d(\cos^2 x) + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + C}$$

BÀI 70

Tính: $1/\ I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ $2/\ J = \int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right)$

$$= \int \text{tg}^2 x(1+\text{tg}^2 x)d(\text{tg}x)$$

$$= \int \text{tg}^2 x d(\text{tg}x) + \int \text{tg}^4 x d(\text{tg}x)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3}\text{tg}^3 x + \frac{1}{5}\text{tg}^5 x + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \text{arctg}\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$

$$= 2\int \text{arctg}\sqrt{x}\left(\frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\right)$$

$$= 2\int \text{arctg}\sqrt{x}\, d(\text{arctg}\sqrt{x})$$

$$= 2.\frac{1}{2}(\text{arctg}\sqrt{x})^2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = (\text{arctg}\sqrt{x})^2 + C}$$

BÀI 71

Tính: $I = \int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\,dx = \int \cos^4 x \sqrt{\sin x}\,d(\sin x)$

$= \int (1-\sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x}\,d(\sin x)$

$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\sin^{\frac{1}{2}} x\,d(\sin x)$

$= \int \left(\sin^{\frac{1}{2}} x - 2\sin^{\frac{5}{2}} x + \sin^{\frac{9}{2}} x\right) d(\sin x)$

$= \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x}{\frac{1}{2}+1} - 2\frac{\sin^{\frac{7}{2}} x}{\frac{5}{2}+1} + \frac{\sin^{\frac{11}{2}} x}{\frac{9}{2}+1} + C$

$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x + C$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{4}{7}\sqrt{\sin^7 x} + \frac{2}{11}\sqrt{\sin^{11} x} + C}$

BÀI 72

Tính các tích phân: $1/\ I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $2/\ J = \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}\,dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \int \arcsin x\,d(\arcsin x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C}$

2/ Ta có: $J = \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \text{arctgx}\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$= \int_0^1 \text{arctgx}\,d(\text{arctgx}) = \frac{1}{2}(\text{arctgx})^2\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{\pi^2}{32}}$$

BÀI 73-74

Tính: 1/ $I = \int x^2 \cos(wx)dx$ 2/ $J = \int e^{2x}x^3 dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int x^2 \cos(wx)dx = \frac{1}{w}\int x^2 d\sin(wx)$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{w}x^2 \\ dv = d\sin(wx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{w}xdx \\ v = \sin(wx) \end{cases}$

Do đó:

$$I = uv - \int vdu$$

$$= \frac{1}{w}x^2\sin(wx) - \frac{2}{w}\int x\sin(wx)xdx \qquad (1)$$

Tính $\int x\sin(wx)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(wx)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-\cos(wx)}{w} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \int x\sin(wx)dx = -\frac{1}{w}x\cos(wx) + \frac{1}{w}\int \cos(wx)dx$$

$$= -\frac{x\cos(wx)}{w} + \frac{\sin(wx)}{w^2} \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$I = \frac{1}{w}x^2\sin(wx) - \frac{2}{w}\left[-\frac{x\cos(wx)}{w} + \frac{\sin(wx)}{w^2}\right] + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \sin(wx)\left[\frac{1}{w}x^2 - \frac{2}{w^3}\right] + \frac{2x\cos(wx)}{w^2} + C}$$

2/ Ta có: $J = \int e^{2x}x^3dx = \frac{1}{2}\int x^3de^{2x}$

Đặt $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = de^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2dx \\ v = e^{2x} \end{cases}$

$$J = uv - \int vdu = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}x^2dx$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}\int x^2de^{2x} = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}J_1 \quad (1)$$

Tính J_1 : $J_1 = \int x^2de^{2x}$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = de^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^{2x} \end{cases}$

$$J_1 = uv - \int vdu = x^2e^{2x} - 2\int e^{2x}xdx$$

$$= x^2e^{2x} - \int xde^{2x}$$

$$= x^2e^{2x} - J_2 \quad (2)$$

$$J_2 = \int xde^{2x} = xe^{2x} - \int e^{2x}dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}\int de^{2x} + C$$

$$= xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được:

$$J_1 = x^2e^{2x} - (xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}) + C \quad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta có:

$$I = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}\left[x^2e^{2x} - \left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\right] + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = e^{2x}\left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right] + C}$$

BÀI 75-76

Tính: 1/ $I = \int \frac{\cot gx}{\ln \sin x} dx$ 2/ $J = \int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\cot gx}{\ln \sin x} dx = \int \frac{1}{\ln(\sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx$ (1)

Biết $d\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cos x dx$

Do đó từ (1) ta có:

$$I = \int \frac{1}{\ln(\sin x)} d\ln(\sin x)$$

$$= \ln|\ln(\sin x| + C$$

2/ Ta có: $J = \int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \ln(\cos x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \ln(\cos x) d(tgx)$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = d(tgx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ v = tgx \end{cases}$

Suy ra:

$$J = uv - \int vdu = tgx.\ln(\cos x) + \int tg^2 x dx + C$$

$$= tgx \ln(\cos x) + \int (tg^2 x + 1 - 1) dx + C$$

$$= tgx \ln(\cos x) + \int dtgx - \int dx + C$$

$$= tgx \ln(\cos x) + tgx - x + C$$

Vậy:

$$J = tgx\,[1 + \ln(\cos x)] - x + C$$

BÀI 77-78

Tính: $1/\int\frac{\sin 2x dx}{4-\cos^2 2x}$. $2/\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

GIẢI

$$1/\ I=\int\frac{\sin 2x dx}{4-\cos^2 2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos 2x)}{(2-\cos 2x)(2+\cos 2x)}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2-\cos 2x}+\frac{1}{2+\cos 2x}\right)d(\cos 2x)$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{-d(2-\cos 2x)}{2-\cos 2x}-\frac{1}{8}\int\frac{d(2+\cos 2x)}{2+\cos 2x}$$

$$=\frac{1}{8}\ln(2-\cos 2x)-\frac{1}{8}\ln(2+\cos 2x)+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2-\cos 2x}{2+\cos 2x}\right|+C}$$

$$2/\ J=\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Đặt $u=-\arcsin x \Rightarrow du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv=d\sqrt{1-x^2} \Rightarrow v=\sqrt{1-x^2}$

Ta có $I=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int dx$

$$\Rightarrow \boxed{I=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C}$$

BÀI 79-80

Tính: $1/\ I=\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$ $2/\ J=\int\frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I=\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{x\cos x}{\sin x}\cdot\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)$

$$=-\int x\cot gx d(\cot gx)$$

Đặt $\begin{cases} u = -x \\ dv = \cot gx d(\cot gx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \frac{1}{2}\cot g^2 x \end{cases}$

Do đó:

$$I = uv - \int vdu = -\frac{1}{2}\cot g^2 x + \frac{1}{2}\int \cot g^2 x dx + C$$

$$= -\frac{1}{2}x\cot g^2 x + \frac{1}{2}\int\left[\left(\cot g^2 x + 1\right) - 1\right]dx + C$$

$$= -\frac{1}{2}x\cot g^2 x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int dx + C$$

$$= -\frac{1}{2}x\cot g^2 x - \frac{1}{2}\cot gx - \frac{1}{2}x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{2}(x\cot g^2 x + \cot gx + x) + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx = \int \frac{dx}{\sin 2x} + \int \frac{tgx}{\sin 2x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sin 2x} + \int \frac{\sin x}{2\sin x\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|tgx| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}(\ln|tgx| + tgx) + C}$$

Chú ý: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$ (Xem bài 14)

BÀI 81

Tính: $1/\ I = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$ $\qquad 2/\ J = \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$

Biến đổi mẫu $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{3}}\cos x + \sin x$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| + C}$$

2/ Ta có:

$$J = \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = \int \frac{(\sin x + 1) - 1}{1+\sin x} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= x - \int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + C = x - \int \frac{-d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = x + \frac{1}{2}\cot gx + C}$$

Chú ý: $d\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -dx$

BÀI 82

Tính: $I = \int \dfrac{1 - tg\dfrac{x}{2}}{1 + tg\dfrac{x}{2}} dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{1 - tg\frac{x}{2}}{1 + tg\frac{x}{2}} dx$

Biến đổi

$$\frac{1 - tg\frac{x}{2}}{1 + tg\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{1 + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

Do đó: $I = \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} = \int \frac{d(\sin x + 1)}{1 + \sin x}$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \ln(1 + \sin x) + C}$

Hoặc $I = \int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} - \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \int \frac{d\cos x}{\cos x} + C$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln|\cos x| + C$$

Chú ý $tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos x$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\cdot\cos x$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\cos x$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\cos x = 1+\sin x$$

BÀI 83-84

Tính: $1/\ I=\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx$ $\qquad 2/\ J=\int\frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^4 x}dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I=\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx=\int\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}}$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}2d\frac{x}{2}$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$ (xem bài 14)

$\Rightarrow$ $\boxed{I=\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{x}{4}\right|+C}$

2/ Ta có: $J=\int\frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^4 x}dx$

$$= \int tg^{\frac{2}{3}}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int tg^{\frac{2}{3}}x\left(1+tg^2x\right)d(tgx)$$

$$= \int tg^{\frac{2}{3}}x\,d(tgx) + \int tg^{\frac{8}{3}}x\,d(tgx)$$

$$= \frac{3}{5}tg^{\frac{5}{3}}x + \frac{3}{11}tg^{\frac{11}{3}}x + C$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{tg^5x} + \frac{3}{11}\sqrt[3]{tg^{11}x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{3}{55}\sqrt[3]{tg^5x\left(11+5tg^2x\right)} + C}$$

BÀI 85

Tính: $I = \int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = d\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) \\ v = x \end{cases}$

$$I = uv - \int vdu = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int x\,d\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) \quad (1)$$

Tính $d\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) = \left(\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'dx$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'dx$$

$$= -\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$

$$(1) \Rightarrow \quad I = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{2}\int\sqrt{x}\,\frac{dx}{x+1} + C \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$;

$\Rightarrow dx = 2udu$

Tính $\int\sqrt{x}\,\frac{dx}{x+1}$ $\qquad x + 1 = u^2 + 1$

$$\int\sqrt{x}\,\frac{dx}{x+1} = \int\frac{u(2udu)}{u^2+1} = 2\int\frac{u^2du}{u^2+1}$$

$$= 2\int\frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = 2\int du - 2\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2u - 2\text{arctg}u + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\text{arctg}\sqrt{x} + C$$

Thế vào (2) ta được:

$$\boxed{I = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \text{arctg}\sqrt{x} + C}$$

BÀI 86

Tính: $\quad I = \int\frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$

GIẢI

Ta có:

$$I = \int\frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{2tgx}{1+tg^2x}}}$$

$$= \int (1+tg^2x)\sqrt{1+tg^2x} \cdot \frac{\sqrt{1+tg^2x}}{\sqrt{2tgx}} dx$$

$$= \int (1+tg^2x) \frac{d(tgx)}{\sqrt{2tgx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(tgx)}{\sqrt{tgx}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{tgx^3} d(tgx)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int tg^{\frac{1}{2}}x d(tgx) + \int tg^{\frac{3}{2}}x d(tgx)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \sqrt{2}\left(\sqrt{tgx} + \frac{1}{5} tg^{\frac{5}{2}}x\right) + C}$$

BÀI 87-88

Tính: 1/ $I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ **2/** $J = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\int tgx(1+\cot g^2 x) d(\cot gx)$$

$$= -\int \frac{d(\cot gx)}{\cot gx} - \int \cot gx d(\cot gx)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\ln|\cot gx| - \frac{1}{2}\cot g^2 x + C} \quad (a)$$

Cách khác : $I = \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sin^4 x}$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x(1-\cos^2 x)^2}$$

$$= -\int \frac{\cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{\cos x(1-\cos^2 x)^2} d(\cos x)$$

$$= -\int \frac{\cos x d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x(1-\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1-\cos^2 x)}{(1-\cos^2 x)^2} + \int \frac{\cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{\cos x(1-\cos^2 x)^2} d(\cos x)$$

$$= \frac{-1}{2\sin^2 x} - \int \frac{\cos x d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln|tgx| + C} \qquad (b)$$

Hai kết quả (a) và (b) đều đúng vì:

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x} = \left(-\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln|tgx| + C\right)' = \left(-\ln|\cot gx| - \frac{1}{2}\cot g^2 x + C\right)'$$

2/ Ta có : $J = \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$

$$J = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{(1-\sin^2 x)\sin^2 x}$$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$J = \int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int \frac{dt}{(1-t^2)} + \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \int t^{-2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{t} + C$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{\sin x} + C$$

BÀI 89-90

Tính: $1/\ I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad 2/\ J = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2\,dx}{\cos^2 x}$

$$= \int \frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int dx + \int \cos^2 x\,dx$$

$$= tgx - 2x + \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + C$$

$$= tgx - 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = tgx - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

2/ Ta có : $J = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$

Phân tích $\quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

và $\quad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

Suy ra:

$$J = \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,2d\frac{x}{2}}{4\sin^4\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= -\int \cot g \frac{x}{2} d\left(\cot g \frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{1}{2}\cot g^2 \frac{x}{2} + C}$$

BÀI 91

Tính: 1/ $I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$ 2/ $J = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$

Biết $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nên

$$I = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^3} = \int (\arcsin x)^{-3} d(\arcsin x)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-1}{2(\arcsin x)^2} + C}$$

2/ Ta có: $J = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

$$= \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}\int d(tgx) + \frac{1}{2}x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}(tgx + x) + C}$$

BÀI 92

Tính: $1/\ I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \qquad 2/\ J = \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{d(\sin 2x)}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}$

$= 2\int \sin^{-2} 2x d(\sin 2x)$

$= 2 \cdot \frac{\sin^{-2+1} 2x}{-2+1} + C = \frac{-2}{\sin 2x} + C$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = -(\cot gx + tgx) + C}$

2/ Ta có: $J = \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = tgx + C}$

BÀI 93

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x + \arccos x) dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x + \arccos x) dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx = I_1 + I_2$

Tính I_1: $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = uv\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} v\,du$$

$$= x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \qquad (1)$$

Tính I_2 : $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arccos x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = x\arccos x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \sqrt{\frac{3}{4}} + 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

BÀI 94-95

Tính: $1/\ I = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $\quad 2/\ J = \int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$

GIẢI

1/ Ta có: $I = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{2\sin x\cos x dx}{1+\cos^2 x}$$

$$= -2\int \frac{\cos x d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{I = -\ln(1+\cos^2 x) + C}$

2/ Ta có : $J = \int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{a^2+\sin^2 x} \qquad (1)$$

$$= \int \frac{a d\left(\frac{\sin x}{a}\right)}{a^2\left[1+\left(\frac{\sin x}{a}\right)^2\right]}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{J = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right) + C}$

Từ (1) có thể áp dụng công thức: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

BÀI 96

Tính: $I = \int\left(\frac{1}{\sin x\cos x} - \operatorname{tg} x\right)^2 dx$

GIẢI

Ta có: $$I = \int \left(\frac{1}{\sin x \cos x} - tgx \right)^2 dx$$

Biến đổi biểu thức dưới tích phân:

$$\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \cot gx$$

Do đó: $$I = \int \cot g^2 x dx$$

$$= \int (\cot g^2 x + 1 - 1) dx$$

$$= \int \frac{d}{\sin^2 x} - \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\cot gx - x + C}$$

BÀI 97

Tính tích phân: $$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx$$

Đại học Đà nẵng(2000, A)

GIẢI

Ta có: $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{1 + \sin x}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cos x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x) dx$$

$$= \left(\sin x + \frac{1}{4} \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}}$$

BÀI 98

Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$

Đại học Ngoại thương cơ sở II TP. HCM(2000,B)

GIẢI

$$f(x)=\frac{1}{1+\sin 2x}$$

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = (1+tg^2x)dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Do đó: $$\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{t+1}+C$$

$$= -\frac{1}{1+tgx}+C$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+C$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số f(x) là:

$$F(x)=-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+C$$

BÀI 99

Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$

GIẢI

Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot g^2 x)(-d\cot gx)$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d(\cot gx) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot g^2 x d(\cot gx)$$

$$= -\cot gx \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\cot g^3 x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -(0-1) - \frac{1}{3}(0-1^3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{4}{3}}$$

BÀI 100

Tính: $I = \int \frac{x - arctgx}{x(1+x^2)arctgx} dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int \frac{x - arctgx}{x(1+x^2)arctgx} dx$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)\text{arctgx}} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = J_1 - J_2 \qquad (1)$$

Biết $d(\text{arctgx}) = \frac{dx}{1+x^2}$ nên

$$J_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)\text{arctgx}} = \int \frac{d(\text{arctgx})}{\text{arctgx}} = \ln|\text{arctgx}| + C_1 \qquad (2)$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2$$

$$= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 \qquad (3)$$

Do đó:

$$\boxed{I = \ln|\text{arctgx}| - \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C}$$

BÀI 101

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} dx$

GIẢI

Ta có: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^{\arcsin x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{\arcsin x} \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

Do đó: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} dx = x.e^{\arcsin x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$